

Reti Logiche
Appello del 5 luglio 2007 – Seconde prove

(D2) Dimostrare che se una funzione di commutazione è rappresentata nella forma canonica in somma di prodotti come

$$f = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

dove gli m_i sono mintermini, allora essa può anche essere rappresentata come

$$f = m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_n$$

Se m_i e m_j sono due qualunque mintermini di f , allora è sicuramente $m_i m_j = 0$, poiché almeno un letterale appare in forma diretta in uno dei due mintermini e in forma negata nell'altro. Si può allora scrivere

$$m_i + m_j = m_i \oplus m_j$$

Infatti:

$$\begin{aligned} m_i \oplus m_j &= m_i \bar{m}_j + \bar{m}_i m_j = \\ &= m_i \bar{m}_j + \bar{m}_i m_j + m_i m_j = \\ &= (m_i \bar{m}_j + m_i m_j) + (\bar{m}_i m_j + m_i m_j) = \\ &= m_i (\bar{m}_j + m_j) + m_j (\bar{m}_i + m_i) = \\ &= m_i + m_j \end{aligned}$$

(Allo stesso risultato si poteva pervenire in maniera più informale osservando che le tavole di verità dell'OR e dello XOR differiscono solo quando le variabili di ingresso sono entrambe uguali ad 1, cosa che, come osservato in precedenza, nel caso di due mintermini non si verifica mai.)

Applicando ripetutamente un ragionamento analogo all'OR di più mintermini, e ricordando la proprietà associativa dell'operatore XOR, si perviene alla tesi.

(D3) Dimostrare che in un addizionatore binario per due operandi a n bit in complemento a 2, con carry-in c_0 e carry-out c_n , la condizione di overflow è data da $c_{n-1} \oplus c_n = 1$.

Si consideri la tavola di verità della cella di addizione di indice $n-1$ (la più significativa):

	$x_{n-1}y_{n-1}c_{n-1}$	c_n	z_{n-1}	overflow
0	0 0 0	0	0	0
1	0 0 1	0	1	1
2	0 1 0	0	1	0
3	0 1 1	1	0	0
4	1 0 0	0	1	0
5	1 0 1	1	0	0
6	1 1 0	1	0	1
7	1 1 1	1	1	0

Si ha overflow quando i segni dei due operandi (x_{n-1} , y_{n-1}) sono uguali e nel contempo il risultato ha segno (z_{n-1}) diverso; questa circostanza si verifica nelle righe 1 e 6 della tavola suddetta. Osservando che è possibile stabilire una corrispondenza *univoca* tra i valori della coppia ($c_{n-1}c_n$) e l'overflow, e tabulando l'overflow v come funzione di c_{n-1} e di c_n , si ha:

$c_{n-1}c_n$	v
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

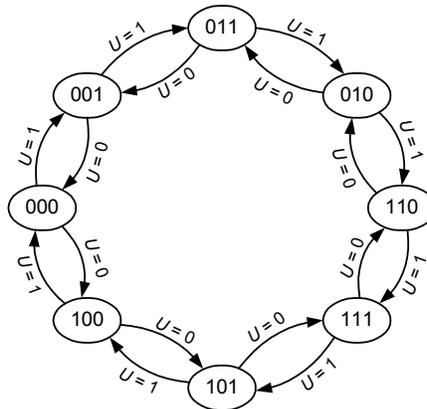
da cui risulta appunto $v = c_{n-1} \oplus c_n$.

(D4) Progettare un contatore up/down a 3 bit in codice Gray.

Il codice Gray, come è noto, è caratterizzato dal fatto che due codici consecutivi differiscono per uno e un solo bit. Nel caso di 3 bit, una possibile sequenza (ma non l'unica) che soddisfa questo requisito è la seguente:

{ 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100 }

Il diagramma di stato del corrispondente contatore up/down è allora il seguente:



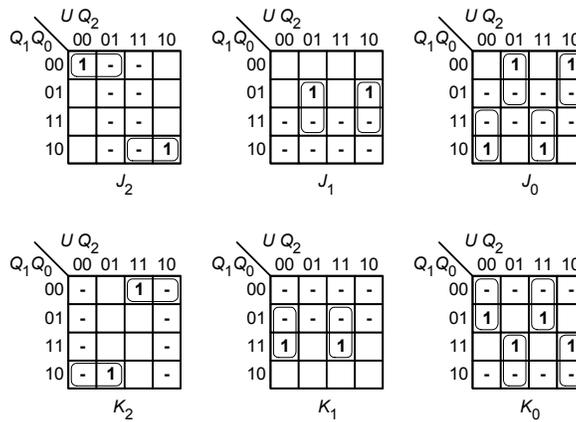
avendo convenzionalmente assunto come sequenza di conteggio *up* ($U = 1$) la sequenza data e come sequenza *down* ($U = 0$) quella ottenuta invertendone l'ordine degli elementi. La tavola di transizione ha di conseguenza la forma:

U	$Q_2Q_1Q_0$	$Q_2'Q_1'Q_0'$	U	$Q_2Q_1Q_0$	$Q_2'Q_1'Q_0'$
0	000	100	1	000	001
0	001	000	1	001	011
0	010	011	1	010	110
0	011	001	1	011	010
0	100	101	1	100	000
0	101	111	1	101	100
0	110	010	1	110	111
0	111	110	1	111	101

Optando per l'uso di flip-flop JK, si ricavano poi le corrispondenti tavole di eccitazione:

U	$Q_2Q_1Q_0$	$Q_2'Q_1'Q_0'$	$J_2K_2 J_1K_1 J_0K_0$	U	$Q_2Q_1Q_0$	$Q_2'Q_1'Q_0'$	$J_2K_2 J_1K_1 J_0K_0$
0	000	100	1- 0- 0-	1	000	001	0- 0- 1-
0	001	000	0- 0- -1	1	001	011	0- 1- -0
0	010	011	0- -0 1-	1	010	110	1- -0 0-
0	011	001	0- -1 -0	1	011	010	0- -0 -1
0	100	101	-0 0- 1-	1	100	000	-1 0- 0-
0	101	111	-0 1- -0	1	101	100	-0 0- -1
0	110	010	-1 -0 0-	1	110	111	-0 -0 1-
0	111	110	-0 -0 -1	1	111	101	-0 -1 -0

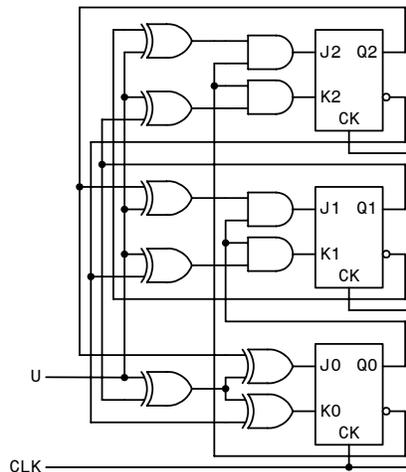
e infine si costruiscono le mappe di Karnaugh per le funzioni di eccitazione dei flip-flop:



Dalle mappe si ottengono poi le equazioni di eccitazione (che conviene semplificare facendo ricorso all'operatore XOR):

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \bar{U}\bar{Q}_1\bar{Q}_0 + UQ_1\bar{Q}_0 = \bar{Q}_0(U \oplus \bar{Q}_1) \\
 K_2 &= U\bar{Q}_1\bar{Q}_0 + \bar{U}Q_1\bar{Q}_0 = \bar{Q}_0(U \oplus Q_1) \\
 J_1 &= \bar{U}\bar{Q}_2Q_0 + U\bar{Q}_2Q_0 = Q_0(U \oplus \bar{Q}_2) \\
 K_1 &= \bar{U}\bar{Q}_2Q_0 + UQ_2Q_0 = Q_0(U \oplus \bar{Q}_2) \\
 J_0 &= \bar{U}\bar{Q}_2Q_1 + \bar{U}Q_2\bar{Q}_1 + UQ_2Q_1 + U\bar{Q}_2\bar{Q}_1 = \bar{U}(Q_1 \oplus Q_2) + U(\overline{Q_1 \oplus Q_2}) = \\
 &= U \oplus Q_1 \oplus Q_2 \\
 K_0 &= \bar{U}\bar{Q}_2\bar{Q}_1 + \bar{U}Q_2Q_1 + UQ_2\bar{Q}_1 + U\bar{Q}_2Q_1 = \bar{U}(\overline{Q_1 \oplus Q_2}) + U(Q_1 \oplus Q_2) = \\
 &= U \oplus Q_1 \oplus \bar{Q}_2
 \end{aligned}$$

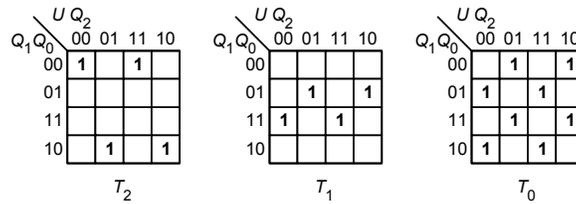
Il circuito che ne deriva è il seguente:



In alternativa, si può optare per l'impiego di flip-flop T (sincroni), nel qual caso la tavola di eccitazione diventa la seguente:

U	Q ₂ Q ₁ Q ₀	Q' ₂ Q' ₁ Q' ₀	T ₂ T ₁ T ₀	U	Q ₂ Q ₁ Q ₀	Q' ₂ Q' ₁ Q' ₀	T ₂ T ₁ T ₀
0	000	100	1 0 0	1	000	001	0 0 1
0	001	000	0 0 1	1	001	011	0 1 0
0	010	011	0 0 1	1	010	110	1 0 0
0	011	001	0 1 0	1	011	010	0 0 1
0	100	101	0 0 1	1	100	000	1 0 0
0	101	111	0 1 0	1	101	100	0 0 1
0	110	010	1 0 0	1	110	111	0 0 1
0	111	110	0 0 1	1	111	101	0 1 0

Le mappe di Karnaugh che ne conseguono sono le seguenti:



e le funzioni di eccitazione che ne derivano sono:

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \bar{Q}_0(\bar{U}\bar{Q}_2\bar{Q}_1 + \bar{U}Q_2Q_1 + UQ_2\bar{Q}_1 + U\bar{Q}_2Q_1) = \\
 &= \bar{Q}_0(\bar{U}(\bar{Q}_1 \oplus Q_2) + U(Q_1 \oplus Q_2)) = \\
 &= \bar{Q}_0(\bar{U} \oplus Q_1 \oplus Q_2) = \bar{Q}_0(U \oplus \bar{Q}_1 \oplus Q_2) \\
 T_1 &= Q_0(\bar{U}\bar{Q}_2Q_1 + \bar{U}Q_2\bar{Q}_1 + UQ_2Q_1 + U\bar{Q}_2\bar{Q}_1) = \\
 &= Q_0(\bar{U}(Q_1 \oplus Q_2) + U(\bar{Q}_1 \oplus \bar{Q}_2)) = \\
 &= Q_0(U \oplus Q_1 \oplus Q_2) \\
 T_0 &= U \oplus Q_0 \oplus Q_1 \oplus Q_2
 \end{aligned}$$

Il circuito corrispondente è in definitiva il seguente:

