Reti Logiche
Appello del 10 settembre 2007 – Seconde prove

(D2) Una funzione di commutazione $f(x_1,...,x_n)$ si dice:

- *simmetrica*, se il suo valore non dipende dall'ordine delle variabili (ad esempio, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ è una funzione simmetrica, mentre $x_1 + x_2x_3$ non lo è);
- *autoduale*, se $f(x_1,...,x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$; ad esempio, $x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_2x_3 + x_1x_3$ è una funzione autoduale, mentre $x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_2x_3$ non lo è.

Di tutte le possibili funzioni di commutazione di *n* variabili, determinare **(a)** quante sono le funzioni simmetriche, **(b)** quante sono le funzioni autoduali, **(c)** quante sono le funzioni sia simmetriche che autoduali.

Cambiare l'ordine delle variabili di una funzione equivale a permutare la configurazione dei valori da esse assunti, ossia l'ordine delle componenti del vettore di ingresso **x**; dunque, se il vettore di ingresso $\tilde{\mathbf{x}}$ è ottenuto da **x** mediante permutazione delle componenti, allora, se la funzione f è simmetrica, è per definizione $f(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})$. Ciò significa che si può definire una partizione $\Pi = \{\pi_k\}$ sull'insieme dei 2^n possibili vettori di ingresso per *n* variabili, in modo che ciascun elemento π_k della partizione contenga tutti e soli i vettori ottenibili l'uno dall'altro mediante permutazione delle componenti, in modo che ogni vettore appartenente a π_k abbia esattamente *k* componenti pari ad 1. Una funzione simmetrica assumerà allora per definizione sempre lo stesso valore per ciascun vettore dell'insieme π_k. Ad esempio, nel caso $n = 4$, Π sarà costituita dai seguenti sottoinsiemi:

$$\pi_0 = \{0000\}$$
$$\pi_1 = \{1000, 0100, 0010, 0001\}$$
$$\pi_2 = \{1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011\}$$
$$\pi_3 = \{1110, 1101, 1011, 0111\}$$
$$\pi_4 = \{1111\}$$

dove π_0 contiene l'unica configurazione con nessun 1, π_1 contiene tutte le configurazioni in cui è presente un solo 1, π_2 contiene tutte le configurazioni in cui sono presenti due 1, e così via. Poiché

- per *n* variabili la partizione Π è costituita da $n+1$ elementi,
- per ogni vettore appartenente a un dato elemento della partizione, una funzione simmetrica assume sempre lo stesso valore,
- per ciascun elemento della partizione la funzione può essere definita con uno di 2 possibili valori,

si può concludere che il numero di funzioni simmetriche di *n* variabili è pari a 2^{n+1}.

Ad esempio, le funzioni simmetriche di 3 variabili sono 16, e sono elencate nella tavola che segue:

$x_1\,x_2\,x_3$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
000	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
001, 010, 100	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
011, 101, 110	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
111	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Complementando le componenti di un vettore di ingresso **x** si ottiene un vettore $\overline{\mathbf{x}}$ che sarà detto *complementare* di **x**; allora, se una funzione f è autoduale, sarà per definizione $f(\mathbf{x}) = \overline{f}(\overline{\mathbf{x}})$, ossia $f(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{f}(\mathbf{x})$. Si può allora partizionare l'insieme dei 2^n possibili vettori di ingresso in due sottoinsiemi Q e $\overline{Q}$ in modo che due vettori mutuamente complementari non appartengano mai allo stesso sottoinsieme. (La partizione si costruisce facilmente scegliendo arbitrariamente una qualunque variabile x_k e assegnando a Q tutti i vettori aventi $x_k = 0$ e a $\overline{Q}$ tutti i vettori aventi $x_k = 1$.) Ad esempio, per $n = 4$ una possibile partizione è

$$Q = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0011\}$$

$$\overline{Q} = \{1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111\}$$

Dal momento che:

- per n variabili ciascun sottoinsieme contiene 2^{n-1} vettori,
- per ciascun elemento di Q la funzione può essere definita con uno di 2 possibili valori,
- se la funzione è autoduale, il suo valore rimane automaticamente definito per ciascun vettore appartenente a $\overline{Q}$,

si può concludere che il numero di funzioni autoduali di n variabili è pari a $2^{2^{n-1}}$.

Ad esempio, le funzioni autoduali di 3 variabili sono 16, e sono elencate nella tavola che segue:

$x_1\,x_2\,x_3$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
000	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
001	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
010	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
011	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
100	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
101	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
110	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
111	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Nella partizione Π definita sopra per le funzioni simmetriche, si può osservare che ciascun vettore di π_k è complementare a un vettore di π_{n-k}; di conseguenza, se la funzione, oltre ad essere simmetrica, è anche autoduale, allora i valori che essa assume per un vettore di π_{n-k} rimangono automaticamente definiti dal valore assunto per un vettore di π_k, dovendo essere $f(\mathbf{x} \in \pi_{n-k}) = \overline{f}(\mathbf{x} \in \pi_k)$.

Si osservi però che, se il numero n di variabili è pari, l'elemento $\pi_{n/2}$ della partizione contiene vettori mutuamente complementari (si consideri ad esempio il sottoinsieme π_2 nelcaso o proposto sopra), portando così alla contraddizione $f(\mathbf{x} \in \pi_{n/2}) = \overline{f}(\mathbf{x} \in \pi_{n/2})$. Ciò significa che per n pari non esistono funzioni allo stesso tempo simmetriche e autoduali.

Se invece il numero n di variabili è dispari, si ha che:

- se la funzione è simmetrica, per ciascun sottoinsieme π_k, con $0 \le k < (n+1)/2$, ad essa può essere assegnato uno di 2 possibili valori,
- esistono $(n+1)/2$ sottoinsiemi π_k tali che $0 \le k < (n+1)/2$,
- se la funzione è anche autoduale, per ciascun sottoinsieme π_k, con $(n+1)/2 \le k \le n$, il suo valore rimane automaticamente definito da $f(\mathbf{x} \in \pi_k) = \overline{f}(\mathbf{x} \in \pi_{n-k})$.

e si può pertanto concludere che, per *n* dispari, il numero di funzioni sia simmetriche che autoduali è pari a $2^{(n+1)/2}$.

Ad esempio, le funzioni simmetriche e autoduali di 3 variabili sono 4, e sono elencate nella tavola che segue:

$x_1\,x_2\,x_3$	f_0	f_1	f_2	f_3
000	0	0	1	1
001, 010, 100	0	1	0	1
011, 101, 110	1	0	1	0
111	1	1	0	0

(D3) Determinare il comportamento della rete iterativa di Fig. 3, in cui ogni cella ha la struttura illustrata in Fig. 4.

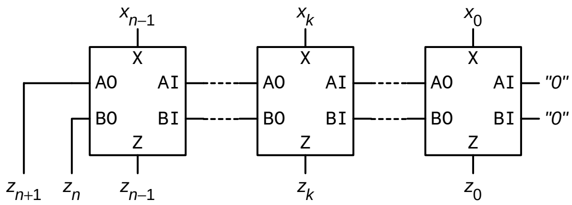


Fig. 3

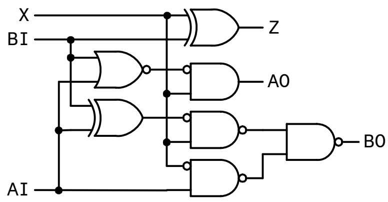


Fig. 4

L'analisi della rete in Fig. 4 conduce alle seguenti funzioni:

$$Z = X \oplus BI$$
$$AO = X\,(AI + BI)$$
$$BO = \overline{X}\,AI + X\,(\overline{AI \oplus BI})$$

e alla corrispondente tavola di verità:

X	*AI*	*BI*	*Z*	*AO*	*BO*
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1

Se, in analogia con le reti iterative aritmetiche come ad esempio gli addizionatori, gli ingressi e le uscite vengono interpretati come numeri binari, e in particolare gli ingressi *AI*, *BI* come carry-in c_{in} e le uscite *AO*, *BO* come carry-out c_{out}, la tavola di verità può essere interpretata come:

X	c_{in}	Z	c_{out}	$2c_{out}+Z$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	2	0	1	2
0	3	1	1	3
1	0	1	1	3
1	1	0	2	4
1	2	1	2	5
1	3	0	3	6

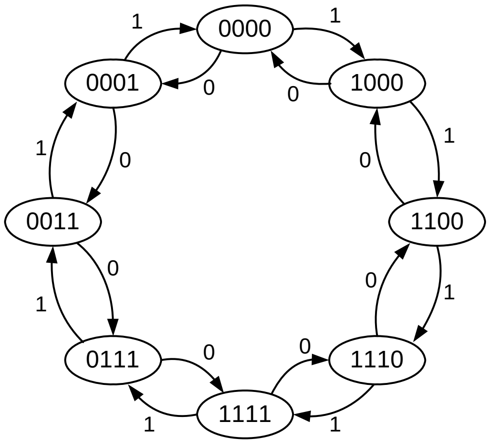
(dove nell'intestazione dell'ultima colonna le operazioni sono da intendersi in senso aritmetico, non Booleano) da cui si può dedurre che, sempre in senso aritmetico, $2c_{out}+Z=3X+c_{in}$. La cella di Fig. 4 pertanto esegue la moltiplicazione dell'operando X per 3 e somma al risultato il valore del carry-in; l'uscita Z è costituita dal bit meno significativo del risultato finale, mentre i restanti due bit costituiscono il carry-out.

A titolo di esempio, è facile verificare il comportamento della rete di Fig. 3, articolata su 4 celle, in alcuni casi particolari:

$x_3x_2x_1x_0$	$z_5z_4z_3z_2z_1z_0$
$0000=0_{10}$	$000000=0_{10}$
$0001=1_{10}$	$000011=3_{10}$
$0011=3_{10}$	$001001=9_{10}$
$0101=5_{10}$	$001111=15_{10}$
$1001=9_{10}$	$011011=27_{10}$
$1111=15_{10}$	$101101=45_{10}$

(D4) Progettare un contatore Johnson bidirezionale a 4 bit.

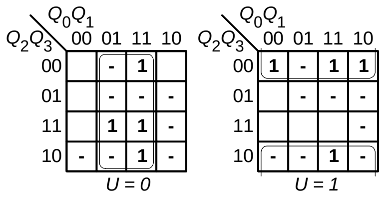
Il diagramma di stato di un contatore Johnson up/down a 4 bit è il seguente:



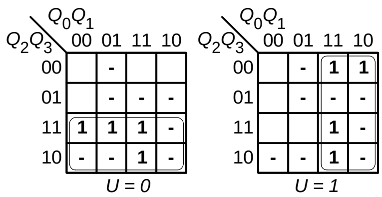
dove l'ingresso è un segnale U (Up) che determina la direzione del conteggio; lo stato iniziale è assunto pari a `0000` per convenienza. La corrispondente tavola di transizione è allora la seguente:

$Q_0Q_1Q_2Q_3$	$U=1$	$U=0$
	$Q'_0Q'_1Q'_2Q'_3$	$Q'_0Q'_1Q'_2Q'_3$
0000	1000	0001
0001	0000	0011
0010	----	----
0011	0001	0111
0100	----	----
0101	----	----
0110	----	----
0111	0011	1111
1000	1100	0000
1001	----	----
1010	----	----
1011	----	----
1100	1110	1000
1101	----	----
1110	1111	1100
1111	0111	1110

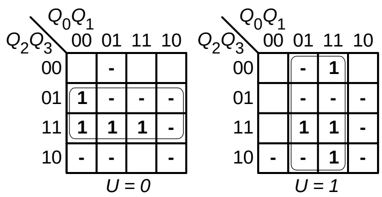
Dalla tavola si ricavano facilmente le equazioni di eccitazione per i flip-flop di tipo D con cui vengono realizzate le variabili di stato:



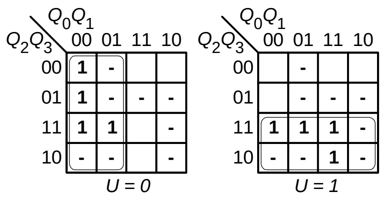
$$D_0 = \overline{U}Q_1 + U\overline{Q}_3$$



$$D_1 = \overline{U}Q_2 + UQ_0$$

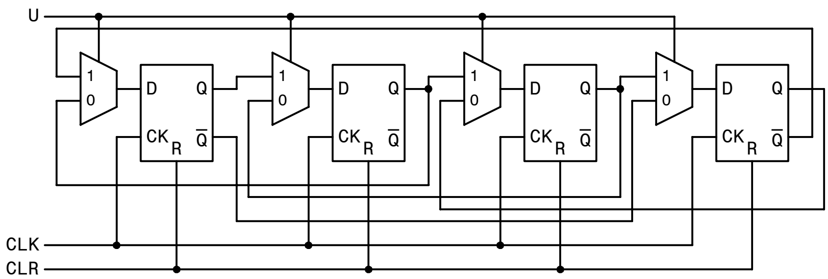


$$D_2 = \overline{U}Q_3 + UQ_1$$

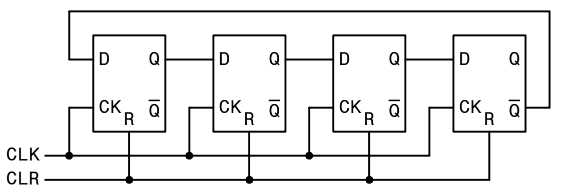


$$D_3 = \overline{U}\,\overline{Q}_0 + UQ_2$$

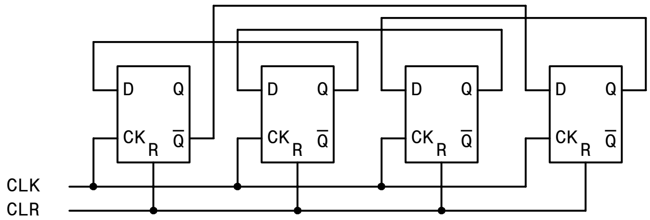
Facendo uso di multiplexer controllati dal segnale *U*, il circuito che ne deriva è il seguente:



Allo stesso circuito si può pervenire in modo più rapido se, nel diagramma di stato, si osserva che la sequenza di conteggio per $U = 0$ può essere ottenuta da quella per $U = 1$ semplicemente rovesciando l'ordine delle variabili di stato ($Q_0Q_1Q_2Q_3 \rightarrow Q_3Q_2Q_1Q_0$). Ciò significa che, essendo la struttura del contatore Johnson a 4 bit la seguente:



la struttura del corrispondente contatore Down si ottiene da essa semplicemente invertendo l'ordine dei flip-flop e lasciando immutate tutti le interconnessioni:



La struttura del contatore bidirezionale, già illustrata sopra, si ottiene allora facilmente unificando le due strutture mediante multiplexer sugli ingressi *D* dei flip-flop, controllati dal segnale *U*.